第 9 章　真空中的静电场（上）

本章任务　主要求电场强度分布、偶尔算算电通量和电场力

○ 基础知识

1.库仑定律

库仑定律

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$$

- ε_0：**真空中的介电常数** $=8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$
- 方向：沿着两点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸

2.电场强度

- 电荷在其周围空间激发**电场**，通过电场对其他电荷产生力的作用
- 定义：单位试验电荷（电量小，可看成点电荷）在该点所受电场力，单位 N/C 或 V/m

电场强度定义式	点电荷产生的电场强度
$\boldsymbol{E}=\dfrac{\boldsymbol{F}}{q_0}$	$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$

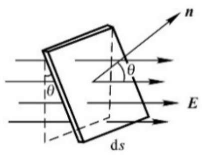
- **场强叠加原理**　点电荷系产生的电场等于各点电荷单独存在时产生的电场的**矢量和**

3.电通量

- 曲面 S 上各点的场强的法向分量的积分（联系第二类曲面积分）

电通量定义

$$\Phi_e=\int_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



- 对于闭合曲面，规定法线方向 $\boldsymbol{n}$ 为自内而外的方向
- 特殊情况：均匀电场 E 与平面 S 法线夹角为 θ → $\Phi_e=ES\cos\theta=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S}$

4.高斯定理

- **通过任意闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的所有电荷量的代数和除以** ε_0

高斯定理

$$\Phi_e=\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

5.微元公式

- 本章会涉及到较多微积分 II 中的线积分、面积分、三重积分等，为了方便常用微元法替代

直线	圆弧	半径为 r 的圆环	半径为 r 的球壳
$\mathrm{d}l$	$R\mathrm{d}\theta$	$2\pi r\mathrm{d}r$	$4\pi r^2\mathrm{d}r$

一　求电场强度

1. 微元法求连续点电荷构成的带电体在某点的场强

① **将带电体分割成点电荷微元** $\mathrm{d}q$

电荷连续分布的情况通过**电荷密度**（空间的数量函数）表示，分为线(λ)、面(σ)、体(ρ)密度，则

微元所带电荷量

$$\boxed{\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l}\ \text{或}\ \boxed{\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S}\ \text{或}\ \boxed{\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V}$$

若是圆弧或球面，用角度 $\mathrm{d}\theta$ 进一步代换

② **表示出该微元电荷产生的场强** $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$（一般要求出各个分量）

电场强度微元

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q}$$

最好画图标出场强方向，防止分量算错，这里就要规定好各个分量的正方向

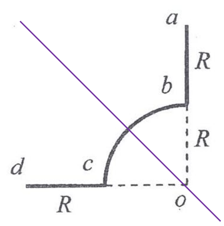
③ **对** $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ **作积分**（注意电场强度是矢量，因此要对各个分量分别积分，最后要判断好方向）

电场强度积分

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{E}}$$

技巧　做题前可以先观察电荷分布，若电荷分布具有对称性，则会有某些方向的场强分量为 0

例 1　（11–12，6）均匀带电直线弯成如图形状，已知 $ab=cd=R$，bc 是半径为 R 的四分之一圆弧，电荷线密度为 λ。求圆弧中心 o 点的电场强度



解　带电体电荷均匀分布，呈轴对称（如图所示），且对称轴过 o 点

→　o 点场强与对称轴垂直的分量为 0，只有平行的分量

考虑 ab 上距离 o 为 x 的一点，微元应表示为 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，其在 o 点产生的场强

$$\mathrm{d}E_{//}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

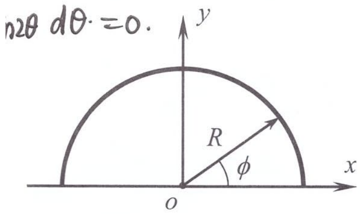
考虑圆弧 bc 上一点 P（oP 与对称轴夹角为 θ），微元应表示为 $\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta$，则

$$\mathrm{d}E_{//}=\cos\theta\cdot\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

对称轴左右两侧产生的场强平行分量大小是相等的，因此

$$E=2\left(\int_R^{2R}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}+\int_0^{\pi/4}\frac{\lambda\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)=\frac{3\sqrt{2}\lambda}{8\pi\varepsilon_0 R}\text{，方向沿正右下}$$

例 2　（19—20，6）一带电细线弯成半径为 R 的半圆形，电荷线密度 $\lambda=\lambda_0\sin\varphi$，其中 λ_0 为一正常量，φ 为半径 R 与 x 轴组成的夹角，如图所示，试求圆心 o 处的电场强度。



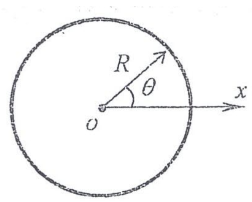
解　带电体电荷分布虽然不均匀，但其实可以证明是关于 y 轴对称的

∴ 夹角为 φ 的微元电荷在 o 点产生的场强 y 轴分量大小

$$\mathrm{d}E_y=\sin\varphi\cdot\frac{\lambda R\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0R}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

积分：$E=E_y=\int_0^{\pi}\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0R}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0R}$，方向竖直向下

例 3　（09—10，6）一带电球面，面电荷密度分布为 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$，式中 σ_0 为常量，θ 角如图所示。求球心处电场强度 $\boldsymbol{E}$。



解　① 判断对称

因为面电荷密度分布 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$，因此电荷分布关于 x 轴对称

因此场强只有 x 轴分量

② 取微元

根据微积分所学，球坐标下的体积微元为 $r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，当 $r=R$ 时，体积微元成为面积微元

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\ （0<\theta<\pi，\ 0<\varphi<2\pi）$$

因此

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma_0R^2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

③ 列出 $\mathrm{d}E$，然后积分

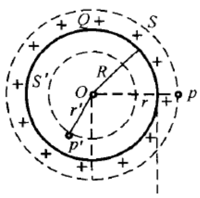
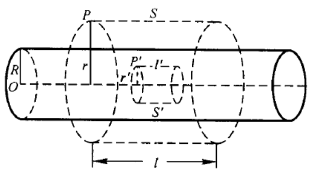
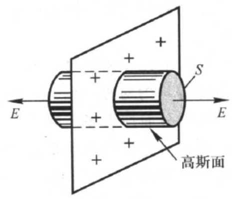
$$\mathrm{d}E_x=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\cos\theta=\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\ （以 x 轴负向为正）$$

积分：

$$E_x=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\cos\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}，方向沿 x 轴负向$$

2. 用高斯定理求电场强度分布

· 只有一些特殊的模型才能使用该方法，本课程涉及以下三种模型

电荷分布球对称的球面/体	无限长带电圆柱面/体	无限大平面（可有厚度）
		

这三种模型的电荷分布只允许在径向（平面为法向）上不均匀

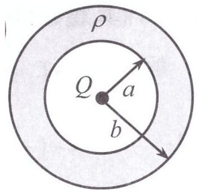
① **找特定的闭合曲面（高斯面）**，使曲面上各点场强大小相同，方向均垂直于该点法向量

② 设该曲面上场强大小 E，**用定义求出曲面的电通量**

③ 再**用高斯定理求出曲面的电通量**，列方程即可解出 E，再根据对称性描述方向

（此时电荷可能是连续分布的，要用积分求出电荷量）

例 4　（20–21 & 10–11，6）有一带电球壳，内、外半径分别为 a 和 b，电荷体密度 $\rho = A/r$，A 是已知常量，r 为离球心的距离，在球心处有一点电荷 Q。试求电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的分布。



解　取**半径为 r 的同心球面**为高斯面，设球面上的场强为 E，则有

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q \ \rightarrow\ E = \frac{\sum q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

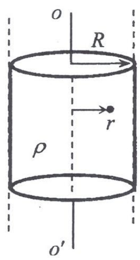
q 和 r 的关系要分类讨论：

$r < a$：$\sum q = Q$　　$\therefore\ E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

$a < r < b$：$\sum q = Q + \int_a^r \dfrac{A}{r} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = Q + 2\pi A(r^2 - a^2)$　　$E = \dfrac{Q + 2\pi A(r^2 - a^2)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

$r > b$　：$\sum q = Q + \int_a^b \dfrac{A}{r} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = Q + 2\pi A(b^2 - a^2)$　　$E = \dfrac{Q + 2\pi A(b^2 - a^2)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

例 5　（15–16，6）半径为 R 的无限长圆柱，柱内电荷体密度为 $\rho = ar - br^2$，r 为某点到圆柱轴线的距离，a、b 为常量，试求带电圆柱内外电场分布。



解　取**半径为 r，长 l 的同轴圆柱面**为高斯面 → 只有侧面有电通量

设侧面上各点场强为 E：$2\pi r l E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q \ \rightarrow\ E = \dfrac{\sum q}{2\pi r l \varepsilon_0}$

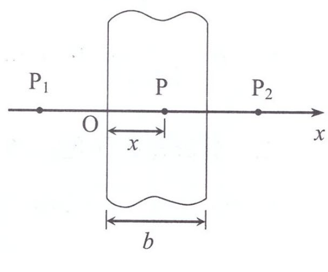
· $r < R$：$\sum q = \int_V \rho \mathrm{d}V = l\int_0^r (ar - br^2)\cdot 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi l(\dfrac{1}{3}ar^3 - \dfrac{1}{4}br^4)$　$\therefore\ E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\dfrac{1}{3}ar^2 - \dfrac{1}{4}br^3)$

· $r > R$：$\sum q = \int_V \rho \mathrm{d}V = l\int_0^R (ar - br^2)\cdot 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi l(\dfrac{1}{3}aR^3 - \dfrac{1}{4}bR^4)$　$\therefore\ E = \dfrac{1}{r\varepsilon_0}(\dfrac{1}{3}aR^3 - \dfrac{1}{4}bR^4)$

例 6　（17–18，6）如图所示，一厚为 b 的“无限大”带电平板，其电荷体密度分布为 $\rho = kx^2 (0 \le x \le b)$，式中 k 为一正的常量。求：

（1）平板外两侧任一点 P_1 和 P_2 处的电场强度大小；

（2）平板内坐标为 x 任一点 P 处的电场强度大小。

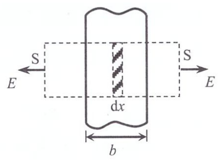


解　**取轴线垂直于平板平面的圆柱面**为高斯面，则仅两底面有电通量

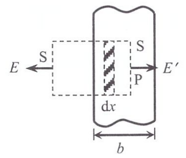
（1）对于平板外两侧的点，让两个底面均位于平板外侧：

设两底面上的场强为 E，由高斯定理

$$2SE=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q \Rightarrow E=\frac{\sum q}{2S\varepsilon_0}$$



$$\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V=S\int_0^b kx^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}Skb^3 \quad \therefore \quad E=\frac{kb^3}{6\varepsilon_0}$$



（2）让其中一个底面位于 x 处，则此时的电通量

$$(E+E')S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

$$\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V=S\int_0^x kx^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}Skx^3 \quad \therefore \quad E'=\frac{1}{S\varepsilon_0}\frac{1}{3}Skx^3-\frac{kb^3}{6\varepsilon_0}=\frac{k}{3\varepsilon_0}(x^3-\frac{b^3}{2})$$

注意　高斯定理也会用到场强叠加，有些题目需要结合使用这两种方法

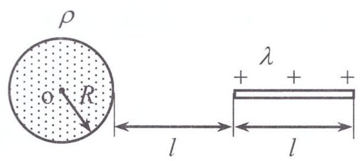
二　求电场力和电通量

1. 求带电体 A 作用于带电体 B 的电场力

① **求出带电体 A 的场强分布（一般是用高斯定理）**

② 将 B 分解成微元 $\mathrm{d}q$，**计算微元受到的库仑力** $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\mathrm{d}q$，然后积分

例 7　（18–19/04–05，6（节选））如图所示，在真空中一半径为 R 的非金属带电球，电荷体密度为 $\rho=kr^2$，k 为正常量，r 为离球心的距离。另有一均匀带电细棒，长为 l，电荷线密度为 λ，棒的一端距球面距离为 l，求细棒所受的静电场力



解　与例 4 同理，球产生的场强分布为 $E=\frac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}$ （$r>R$）

取棒上点电荷微元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}r$，则距球心 r 处的微元受到的电场力

$$\mathrm{d}F=\frac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}\lambda\mathrm{d}r \text{（方向向右）}$$

积分：

$$F=\int_{R+l}^{R+2l}\frac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}\lambda\mathrm{d}r=\frac{k\lambda R^5}{5\varepsilon_0}(\frac{1}{R+l}-\frac{1}{R+2l})$$

2. 求电通量

· 通常都是可以用定义求，然后用高斯定理反推电荷量

例 7　（16–17，12）图中虚线所示为一立方形的高斯面，已知空间的场强分布为：$E_x=bx$，$E_y=0$，$E_z=0$。高斯面边长 $a=0.1\mathrm{m}$，常量 $b=1000\mathrm{N/(C\cdot m)}$。则该闭合面内包含的净电荷为________.

解　由于只有 E_x 不为 0，只有左、右两个面上有电通量：

$$\Phi_e=E_x(2a)\cdot a^2-E_x(a)\cdot a^2=2ab\cdot a^2-ab\cdot a^2=a^3b$$

则由高斯定理，$q=\varepsilon_0 a^3 b=8.85\times10^{-12}\mathrm{C}$